Chapter 3

# 第 3 章 离散时间信号与系统

本章讨论离散时间信号与系统的基本概念以及若干重要的信号类型。首先给出离散时间信号的含义，然后提出几种基本运算以及一些常用的基本信号序列。给出线性、移位不变性、因果性、稳定性和可逆性这几个具有特殊重要性的概念，讨论用卷积和来表示线性移不变系统的输入输出关系。

由于其在数字信号处理中的重要性，本章对卷积、相关和差分方程描述给予了特别的注意。

## 3.1 离散时间序列

### 3.1.1 信号与序列

信号一般可以粗略划分为模拟信号和数字信号。模拟信号可用 $x(t)$ 表示，其中变量 $t$ 可以表示任何物理量，但通常假定以秒为单位的时间连续变量；离散时间信号通过对连续时间信号进行采样，从而获得一组离散样本值。离散样本值之间的间隔 $T$ 称为采样间隔，离散时间样本出现的频率(即单位时间的样本数)为

$$f_s = \frac{1}{T}$$

$f_s$ 又称为采样率。一般而言，即使样本值不是对连续时间信号的采样，还是使用样本、采样间隔和采样率这些术语。

离散时间信号 $x(nT)$ 是采样间隔 $T$ 和整数 $n$ 的函数。例如离散时间信号 $x(nT)=0.5T(0.8)^{nT}$ 中的整数 $n$ 表示从参考时间点开始的样本序号，所以 $n=0$ 对应于参考时间点，$-n$ 对应于负时间，也就是参考时间点之前的时间。有时将离散时间信号表示为样本序号 $n$ 的函数而非采样时间 $nT$ 的函数会更方便。前者对应于离散时间信号 $x(nT)$ 的序列 $x(n)$，函数波形是 $n$ 的函数。图 3.1.1 给出了离散时间信号 $x(nT)=0.5T(0.8)^{nT}$ 及其对应的离散时间序列 $x(n)$ 的波形。注意，序列 $x(n)$ 是对信号 $x(nT)$ 进行时间归一化后的结果，其中归一化因子就是采样间隔 $T$。

如果离散时间信号的样本值不依赖于采样间隔 $T$，那么它所对应的序列就是所谓的离散时间序列。这时对于任何 $T$，序列值均一样，如图 3.1.2 所示。因此，在信号与系统的分析中，可以不必定义采样间隔而直接使用序列，并且由于分析结果也不依赖于采样间隔 $T$，故如此描述序列是有一般性的。其实，如果必须考虑某个具体的采样间隔，只需要对一般结果施加合适的尺度变换即可。

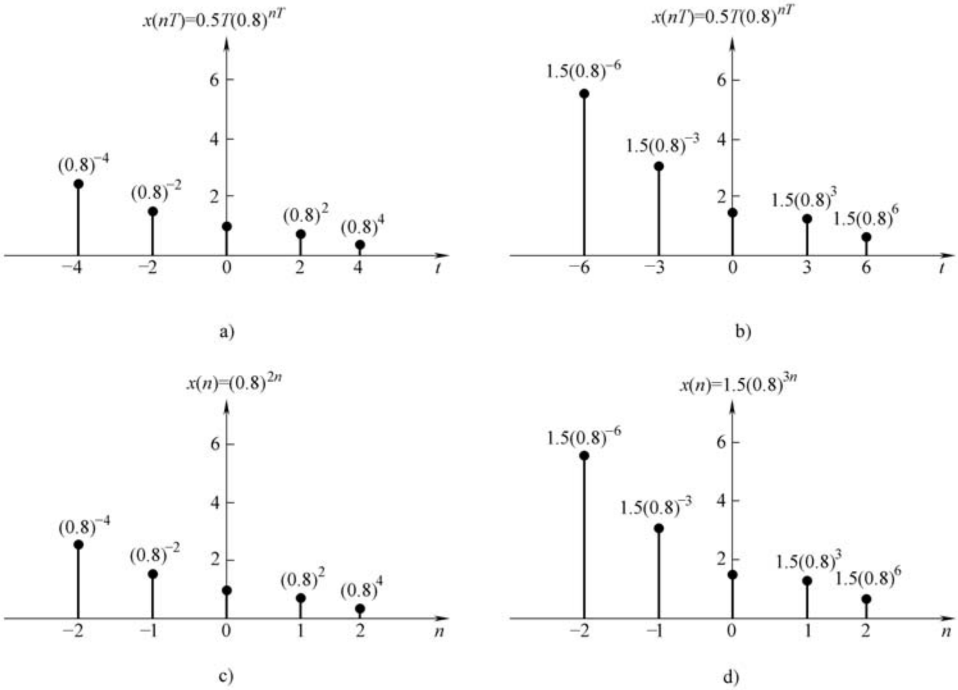


图 3.1.1　$T=2$ 和 $T=3$ 时 $x(nT)=0.5T(0.8)^{nT}$ 的波形及对应序列 $x(n)$

a) $T=2$ 时的离散信号　b) $T=3$ 时的离散信号

c) $T=2$ 时的离散序列　d) $T=3$ 时的离散序列

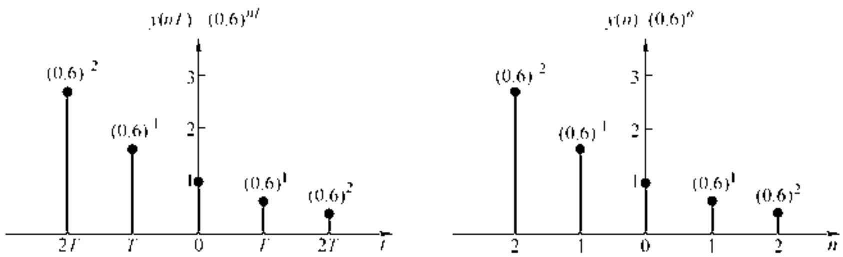


图 3.1.2　不依赖于采样间隔 $T$ 的信号与序列

综上所述，离散时间序列可以认为是在时间上取离散值但不考虑其幅度是否离散化(或量化)的时间信号。离散序列一般用 $x(n)$ 表示，其中变量 $n$ 为整数并表示时间的离散时刻。离散时间信号可用序列来表示。序列是指按一定顺序排列的数值 $x(n)$ 的集合，可用下式之一描述：

$$\{x(-\infty),\cdots,x(-2),x(-1),x(0),x(1),x(2),\cdots,x(\infty)\} \tag{3.1.1}$$

或

$$\{x(n)\},\ -\infty<n<\infty \tag{3.1.2}$$

或

$$x(n)=\{x(n)\}=\left\{\cdots,x(-1),x(\underset{\uparrow}{0}),x(1),\cdots\right\} \tag{3.1.3}$$

其中，式(3.1.3)右端中向上的箭头表示在 $n=0$ 处的样本值。为简便记，往往把序列 $\{x(n)\}$ 直接写成 $x(n)$。

注意，$x(n)$只有在自变量$n$取整数值时才有定义，对于$n$为非整数情况，$x(n)$则未予定义，但不能将其视为零。另外，自变量$n$还可以是力、距离、温度或者个数等，这样离散时间信号与系统的概念就比其名字所代表的含义要更为广泛。

### 3.1.2　序列的类型

对于信号与系统的分析计算，一般用如下方式描述序列$x(n)$：

1）对于全部$n$，将$x(n)$表示为某种简单函数的解析式（序列的简单定义）。

2）对于全部$n$，在不相重叠的区间，将$x(n)$表示为一组简单函数的和式（序列的分段定义）。

为了后续分析的需要，下面介绍几种在信号与系统中常用的典型序列。

**1. 单位样值序列**

离散时间单位样值序列的定义为

$$\delta(n)=\begin{cases}1 & n=0\\0 & n\neq 0\end{cases}=\{\cdots,0,0,\underset{\uparrow}{1},0,0,\cdots\} \tag{3.1.4}$$

单位样值序列$\delta(n)$是数字域中的基本函数，它可以视为图3.1.3所示的单位采样序列，但$\delta(n)$并不是对连续时间冲激函数$\delta(t)$采样而得到的。移位单位样值序列$\delta(n-n_0)$在$n=n_0$处的值为1，在其余各处均为0。将任意离散时间序列$x(n)$与$\delta(n-n_0)$相乘，其结果$x(n)\delta(n-n_0)$除$n=n_0$点外其他处都为0。由此可得出离散时间单位样值序列的抽样性质：

$$x(n)\delta(n-n_0)=x(n_0)\delta(n-n_0)=\begin{cases}x(n_0), & n=n_0\\0, & n\neq n_0\end{cases} \tag{3.1.5}$$

及

$$\sum_{n=a}^{b}x(n)\delta(n-n_0)=\sum_{n=a}^{b}x(n_0)\delta(n-n_0)=x(n_0) \tag{3.1.6}$$

式中，$a<n_0<b$。

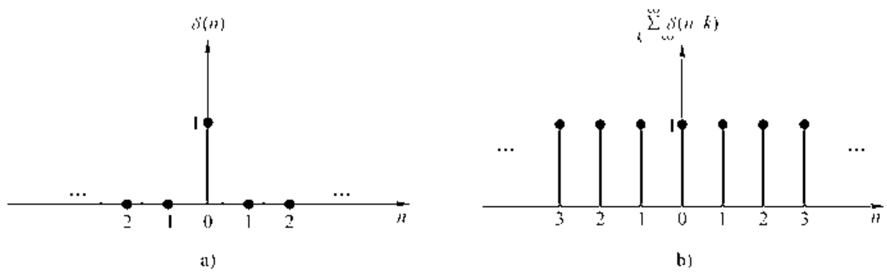

图3.1.3　单位样值

a）单位样值序列　b）单位样值序列串

式（3.1.5）的意义在于，它指出任何离散序列$x(n)$都可以用单位样值序列来描述。这是因为乘积$x(0)\delta(n)$表示序列$x(n)$在$n=0$处的样本值是$x(0)$，乘积$x(1)\delta(n-1)$表示序列$x(n)$在$n=1$处的样本值是$x(1)$，依此类推，任意序列$x(n)$就可以描述为如下形式：

$$\begin{aligned}x(n)&=\cdots+x(-1)\delta(n+1)+x(0)\delta(n)+x(1)\delta(n-1)+\cdots\\&=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)\delta(n-k)\end{aligned} \tag{3.1.7}$$

式中，$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(n-k)$ 称为单位样值序列串，简称冲激串。

单位样值序列 $\delta(n)$ 的意义和单位冲激函数 $\delta(t)$ 的意义相近，不同之处在于，当 $n=0$ 时，$\delta(n)=1$，而不是无穷大。

**2. 单位阶跃序列**

离散时间单位阶跃序列的定义为

$$u(n)=\begin{cases}1 & n\geqslant 0\\ 0 & n<0\end{cases}=\{\cdots,0,0,\underset{\uparrow}{1},1,1,\cdots\} \tag{3.1.8}$$

它的波形如图 3.1.4 所示。

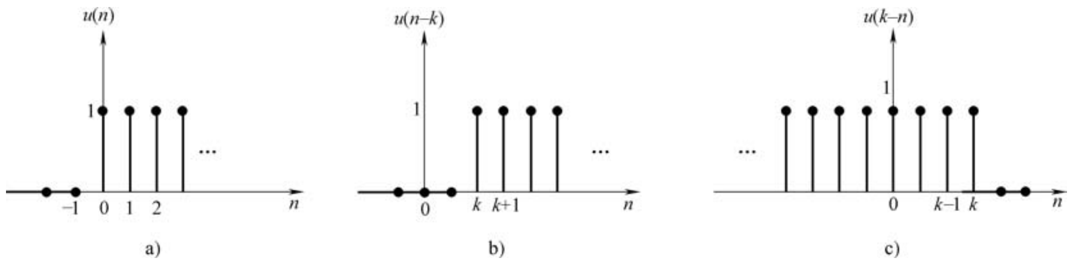


图 3.1.4　$u(n)$、$u(n-k)$ 和 $u(k-n)$ 的波形

a) 单位阶跃序列　b) 右移单位阶跃序列　c) 反因果阶跃序列

根据式(3.1.7)，$u(n)$ 可以用冲激串描述：

$$u(n)=\sum_{k=0}^{\infty}\delta(n-k) \tag{3.1.9}$$

同理，单位样值序列 $\delta(n)$ 也可以用移位阶跃序列来描述：

$$\delta(n)=u(n)-u(n-1) \tag{3.1.10}$$

式中，$u(n-1)$ 是 $u(n)$ 的位移序列。一般而言，若序列 $y(n)$ 与序列 $x(n)$ 满足关系 $y(n)=x(n-k)$，则称序列 $y(n)$ 为序列 $x(n)$ 的位移(或延迟)序列。其中，$k$ 为整数且当 $k>0$ 时为前向(或右)位移，$k<0$ 时为后向(左)位移。另外，根据定义式(3.1.8)，$u(k-n)$ 在 $k-n\geqslant 0$(也就是 $n\leqslant k$)时为 1，如果 $k>0$，则 $u(k-n)$ 的波形如图 3.1.4c 所示。

单位阶跃序列 $u(n)$ 可用来描述一个“通、断”过程，比如 5V 直流电源接通后的状态(或样本值)可以表示为 $5u(n)$。

**3. 指数序列**

离散时间指数序列具有许多应用，例如可用于描述经济系统、人口模型、储能及能耗系统中存在的增长和衰落过程等。它可以定义为

$$x(n)=\begin{cases}A(K)^n, & n\geqslant n_1\\ 0, & n<n_1\end{cases} \tag{3.1.11}$$

式中，$A$ 和 $K$ 为实数或复数，且增长和衰落过程始于 $n_1$ 时刻。若 $|K|>1$，则当 $n\to\infty$ 时序列 $x(n)$ 将发散；若 $|K|<1$，则当 $n\to\infty$ 时 $x(n)$ 将衰减到 0；若 $0<K<1$，则 $x(n)$ 单调递减；若 $-1<K<0$，则 $x(n)$ 在趋于 0 的过程中将在正负值之间振荡；若 $K<-1$，则 $x(n)$ 将在正负值之间振荡发散，如图 3.1.5 所示。

如果 $A$ 和 $K$ 为复数，即

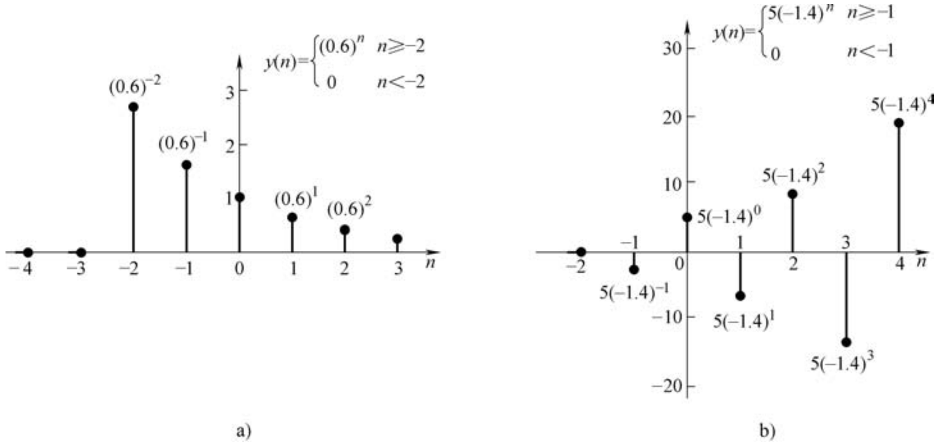


图 3.1.5　指数序列的增减和振荡特性

a）$|K|<1$ 时序列衰减　b）$K$ 为负时序列振荡

$$K=\mathrm{e}^{(\sigma_0+\mathrm{j}\omega_0)}$$

和

$$A=|A|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}$$

则式(3.1.11)可以重新写成

$$\begin{aligned}x(n)&=AK^n=A\mathrm{e}^{(\sigma_0+\mathrm{j}\omega_0)n}=|A|\mathrm{e}^{\sigma_0 n}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega_0 n+\phi)}\\&=|A|\mathrm{e}^{\sigma_0 n}[\cos(\omega_0 n+\phi)+\mathrm{j}\sin(\omega_0 n+\phi)]\end{aligned}\tag{3.1.12}$$

式中，$\sigma_0$、$\phi$ 和 $\omega_0$ 都是实数。

复数序列的实部和虚部可以分别绘图描述。此外，也可以对式(3.1.12)分别绘制其幅度和相位图。特别对相位而言，它的取值范围一般为$(-\pi,\ \pi)$，可以通过用实际相位减 $2\pi$ 的整数倍来实现。但通常绘制相位图时，相位 $\phi_n=\omega_0 n$ 需要进行 $2\pi$ 的取模运算。图 3.1.6 给出了 $x(n)=\mathrm{e}^{(-0.1+\mathrm{j}0.3)n}(-10\leqslant n\leqslant 10)$的幅度、相位、实部和虚部的波形。

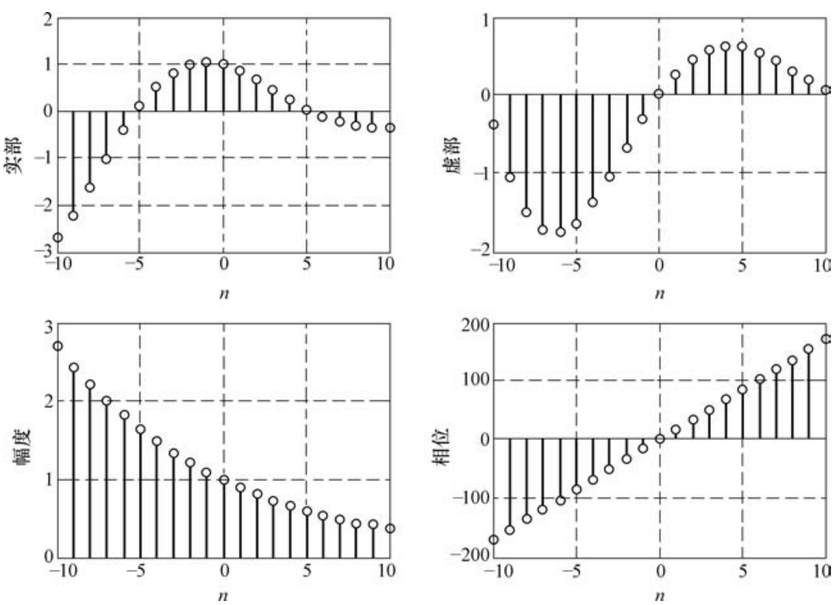


图 3.1.6　$x(n)=\mathrm{e}^{(-0.1+\mathrm{j}0.3)n}(-10\leqslant n\leqslant 10)$的幅度、相位、实部和虚部的波形

**4. 正弦序列**

若以 $T_s$ 为采样间隔对一模拟正弦信号 $x(t)=\cos(\omega t+\theta)$ 进行采样，在 $t=nT_s$ 采样时刻的模拟正弦信号值就可表示为

$$x(nT_s)=\cos(\omega nT_s+\theta) \tag{3.1.13}$$

式中，$\omega$ 是模拟角频率，$\omega=2\pi f$；$n$ 为采样点数；$f_s$ 为采样频率，$f_s=\dfrac{1}{T_s}$；$\theta$ 为初相角。于是式(3.1.13)又可写成

$$x(nT_s)=\cos\left(2\pi n\frac{f}{f_s}+\theta\right)=\cos(2\pi nF+\theta)=\cos(n\Omega+\theta) \tag{3.1.14}$$

式中，$F$ 是归一化频率，称为数字频率(单位：周期/样本)，$F=\dfrac{f}{f_s}$；$\Omega$ 是数字角频率(单位：rad)，$\Omega=2\pi F$。

由于模拟域中的采样值在数字域中通常被记为 $x(n)=x(nT_s)$，因此在不考虑量化误差的情况下就有

$$x(n)=\cos\left(2\pi n\frac{f}{f_s}+\theta\right)=\cos(2\pi nF+\theta)=\cos(n\Omega+\theta) \tag{3.1.15}$$

显然，式(3.1.15)中

$$\Omega=2\pi F=2\pi\frac{f}{f_s}=\frac{\omega}{f_s} \tag{3.1.16}$$

建立了模拟频率 $f$(或角频率 $\omega=2\pi f$)与数字频率 $F$(或数字角频率 $\Omega=2\pi F$)之间的关系。除此之外，假设 $f=f_s$，则有 $\Omega=2\pi$，即采样频率 $f_s$ 对应于数字频率 $2\pi$。同样，$f_s/2$ 也就对应于数字频率 $\pi$。在后面将看到离散序列信号的频率响应是以 $2\pi$ 为周期的周期函数，故习惯上绘制离散序列的频率响应时，其范围是$(-\pi,\ \pi)$或$(0,\ 2\pi)$。

离散时间正弦序列不同于模拟正弦信号，$\Omega$ 不等于被采样模拟信号的频率，因此它既可以是周期序列也可以是非周期序列。换句话说，离散时间正弦序列在时间上不一定是周期的，但它总是具有周期包络。如图 3.1.7 所示，图 3.1.7a 中正弦序列在 16 个样本后开始重复，而图 3.1.7b 中序列却不重复。

总之，对于一个重复序列，必定存在一对 $N$ 和 $m$，使得 $N$ 个采样间隔 $T_s$ 正好等于该模拟信号的 $m$ 个周期 $T$，也就是要满足

$$NT_s=mT$$

或

$$\frac{N}{m}=\frac{T}{T_s}=\frac{f_s}{f}=\frac{2\pi}{\Omega} \tag{3.1.17}$$

式中，$N$ 为序列重复需要的采样点数；$m$ 是当 $N$ 个采样点结束时模拟信号所经过的周期数。可以看出，只要分数 $2\pi/\Omega$ 是一个有理数，那么正弦序列的周期将是 $2\pi/\Omega$ 的整数倍；如果 $2\pi/\Omega$ 是一个无理数，那么序列是非周期的，尽管它有一个正弦包络。例如，$x(n)=\cos(\sqrt{3}n+\phi)$就是一个非周期序列。

**5. 随机序列**

在实际工作中除了能用数学解析式描述的离散信号序列外(这些序列可以通过它们的频

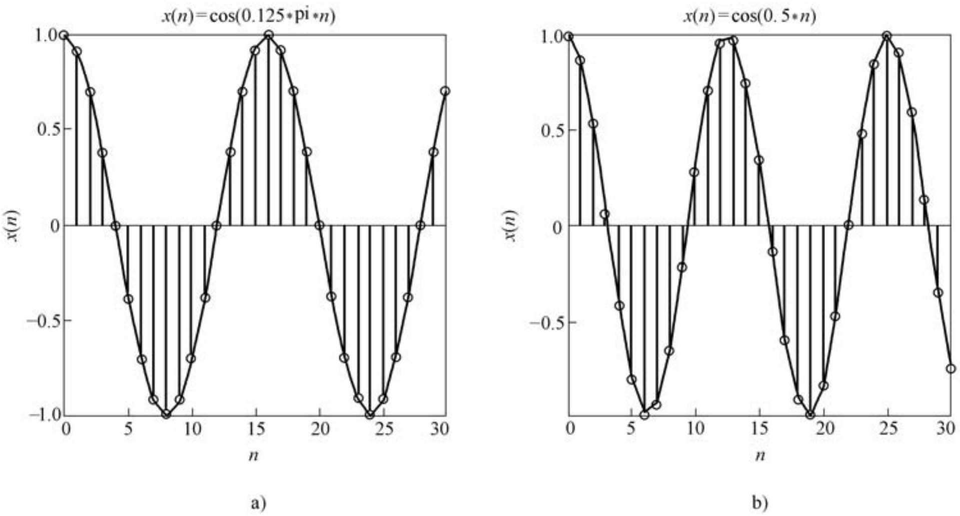


图 3.1.7　正弦序列的周期与包络周期

a) $x(n)$ 是周期正弦、周期包络，周期 $N=16$　b) $x(n)$ 是非周期正弦、周期包络

谱以某种确定的形式给予表征)，还可能遇到许多不能或不方便用数学解析式描述的离散信号序列。这些离散信号序列一般称为随机或统计序列，对它们的描述通常需要用到所谓的概率密度函数(PDF)。

随机或统计序列也能用它们的各阶矩进行描述，如一阶矩(均值 $\mu$)、二阶矩(方差 $\sigma^2$)以及高阶矩的概念。一般而言，一个随机序列完全由它的概率密度函数所定义，而它又唯一地被映射到各阶矩上。针对工程信号，仅仅由均值 $\mu$ 和方差 $\sigma^2$ 就可以给出该序列的概率密度函数，比如高斯分布型随机变量 $x$ 的概率密度函数如下：

$$f_x(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\quad e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} \tag{3.1.18}$$

式(3.1.18)给出的概率密度函数如果随时间变化，则信号序列就是非平稳的。

**6. 周期与非周期序列**

如果序列

$$x(n)=x(n+N),\qquad \forall\, n \tag{3.1.19}$$

成立，且 $N$ 为满足关系式的最小正整数，则定义 $x(n)$ 为周期序列，$N$ 为基本周期。如果一个序列是以 $N$ 为周期的，那么它对于 $2N$、$3N$ 以及所有其他 $N$ 的整数倍都是周期的。如果式(3.1.19)对于任何整数 $N$ 都不满足，则 $x(n)$ 称为非周期序列。

由于周期为 $N$ 的周期序列必然对于所有的 $n$ 和某些整数 $N$ 满足式(3.1.19)，因此若在式(3.1.15)中用 $n+N$ 代替 $n$，得到

$$x(n+N)=\cos(\Omega n+\Omega N+\theta)$$

为满足式(3.1.19)，必有 $\Omega N=2\pi m$，或

$$\Omega=2\pi\frac{m}{N}\quad m\text{、}N\text{ 为整数} \tag{3.1.20}$$

这里再一次强调，与连续时间正弦信号不同，离散时间正弦序列在角频率 $\Omega$ 取任意值时并不

一定是周期的。尤其对于由式(3.1.15)描述的序列，如果是周期的，其 $\Omega$ 必须满足式(3.1.20)，这是一个有理数的 $2\pi$ 倍。另外，由于 $\Omega N$ 是一个角度，故其单位为 rad；而 $N$ 是 $x(n)$ 的一个周期(循环)所包含的样本数，故 $\Omega$ 的单位是 rad/周期。

**例 3.1.1** 一个正弦序列存在如下关系：

$$x(n)=\sin(\Omega n+\theta)=\sin[\Omega(n+N)+\theta]$$

显然，只有当 $\Omega N=2\pi m$ 或 $2\pi/\Omega=N/m$ 时，$\sin(\Omega n+\theta)$ 才为周期序列，其周期亦为 $N$。如果 $2\pi/\Omega=N$ 不是整数，而是有理数，则 $\sin(\Omega n+\theta)$ 仍为周期序列，但周期不为 $2\pi/\Omega=N$，而是 $N$ 的整倍数，其倍数为分数 $2\pi/\Omega$ 的不可约分母。若 $2\pi/\Omega$ 不为有理数，则 $\sin(\Omega n+\theta)$ 不是周期序列，这时一般称它是非周期的或拟周期的。虽然正弦序列并非总是周期的，但它却具有周期包络。

例 3.1.1 讨论的是时间域的周期性。在频域，正弦序列及其谐波序列总是频率上的周期序列。为了说明这一点，针对式(3.1.15)，给 $F$ 加一整数 $m$，则式(3.1.15)变为

$$x(n)=\cos(2\pi nF+\theta)=\cos[2\pi n(F+m)+\theta]=\cos(2\pi nF+\theta+2\pi nm)$$

上式表明，如果 $m$ 是整数，则 $nm$ 亦为整数，因此正弦序列在数字频率 $F\pm m$ 处是一样的。也就是说，正弦序列具有频率上(即频域)的周期性，它的周期是 $F=1$。

总之，正弦序列只有在其数字频率 $F$ 是一个有理分数时才有时间上的周期性，但它总是具有频率上的周期性且周期 $F=1$。

如果设 $x_1(n)$ 是周期为 $N_1$ 的序列，$x_2(n)$ 是周期为 $N_2$ 的序列，则两者之和

$$x(n)=x_1(n)+x_2(n)$$

仍然是周期序列，且新序列的基本周期为

$$N=\frac{N_1N_2}{\gcd(N_1,\ N_2)} \tag{3.1.21}$$

式中，$\gcd(N_1, N_2)$ 表示 $N_1$、$N_2$ 的最大公约数。这种情况对于两个周期序列相乘也成立，即

$$x(n)=x_1(n)x_2(n) \tag{3.1.22}$$

是周期序列，其周期也可用式(3.1.21)确定。不过，此时其基本周期可能更小。

给定任意序列 $x(n)$，可用以下方式复制 $x(n)$，从而总可以构造出一个周期序列：

$$y(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(n-kN) \tag{3.1.23}$$

式中，$N$ 为正整数。显然，$y(n)$ 是以 $N$ 为周期的。

**例 3.1.2** 设两个正弦序列

$$x_1(n)=\sin(5\pi n) \quad 和 \quad x_2(n)=\sqrt{3}\cos(5\pi n)$$

它们是周期序列吗？若是，求出它们的基本周期。

**解：** $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 的角频率均为 $\Omega=5\pi$rad/周期，为确定周期 $N$，根据式(3.1.21)有

$$N=2\pi\frac{m}{\Omega}=\frac{2\pi m}{5\pi}=\frac{2m}{5}$$

显然，为使 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 是周期序列，$N$ 必须是整数。因此，只有当 $m=5, 10, 15, \cdots$ 时，$N$ 才能取整数 $N=2, 4, 6, \cdots$。

**例 3.1.3** 序列 $x(n)=\cos\frac{\pi}{3}n+\sin\frac{\pi}{4}n$ 是否为周期序列，若是，求出其基本周期。

**解：**
$$x(n)=\cos\frac{\pi}{3}n+\sin\frac{\pi}{4}n=x_1(n)+x_2(n)$$

其中

$$x_1(n)=\cos\frac{\pi}{3}n=\cos\Omega_1 n\to\Omega_1=\frac{\pi}{3}$$

$$x_2(n)=\sin\frac{\pi}{4}n=\sin\Omega_2 n\to\Omega_2=\frac{\pi}{4}$$

因为

$\frac{\Omega_1}{2\pi}=\frac{1}{6}$是有理数，$x_1(n)$是周期序列且基本周期 $N_1=6$。

$\frac{\Omega_2}{2\pi}=\frac{1}{8}$是有理数，$x_2(n)$是周期序列且基本周期 $N_2=8$。

又由式(3.1.21)知，$x(n)=x_1(n)+x_2(n)$是周期序列，其基本周期是

$$N=\frac{N_1N_2}{\gcd(N_1,\ N_2)}=\frac{6\times 8}{\gcd(6,\ 8)}=\frac{48}{2}=24$$

**例 3.1.4**　证明复指数序列

$$x(n)=e^{j\Omega n}$$

只有在$\frac{\Omega}{2\pi}$是有理数时才为周期序列。

**证明：**根据式(3.1.19)，若

$$x(n+N)=e^{j\Omega(n+N)}=e^{j\Omega n}e^{j\Omega N}=e^{j\Omega n}=x(n)$$

或
$$e^{j\Omega N}=1$$

复指数序列 $x(n)=e^{j\Omega n}$就是周期的。

显然，$e^{j\Omega N}=1$ 只有在　$\Omega N=2\pi m$($m$ 为整数)或者 $\Omega/(2\pi)=m/N$ 为有理数时才成立。因此，只有在 $\Omega/(2\pi)$是有理数时，$x(n)=e^{j\Omega n}$才为周期序列。

**7. 偶部与奇部**

已知任何信号 $x(n)$都可以分解为其偶部 $x_e(n)$和奇部 $x_o(n)$之和的形式，也就是说

$$x(n)=x_e(n)+x_o(n) \tag{3.1.24}$$

其中偶部具有如下关系式：

$$x_e(n)=\frac{1}{2}\{x(n)+x(-n)\} \tag{3.1.25}$$

奇部具有如下关系式：

$$x_o(n)=\frac{1}{2}\{x(n)-x(-n)\} \tag{3.1.26}$$

复数序列的对称形式与实数序列略有不同。事实上，如果对于所有 $n$，有

$$x(n)=x^*(-n) \tag{3.1.27}$$

则称复信号 $x(n)$是共轭对称的；如果对于所有 $n$，有

$$x(n)=-x^*(-n) \tag{3.1.28}$$

则称复信号 $x(n)$ 是共轭反对称的。

任何复信号都可以分解为一个共轭对称信号和一个共轭反对称信号之和。

**8. 对称序列**

离散时间信号常常具有某种形式的对称性，其中最为有用的两种对称形式是偶对称和奇对称，如图 3.1.8 所示。

若序列 $x(n)$ 与它的镜像 $x(-n)$ 相同，则为偶对称序列；若序列 $x(n)$ 与它的镜像 $x(-n)$ 只相差一个正负号，则为奇对称序列。偶对称和奇对称分别存在如下关系：

$$x_e(n)=x_e(-n) \tag{3.1.29}$$

$$x_o(n)=-x_o(-n) \tag{3.1.30}$$

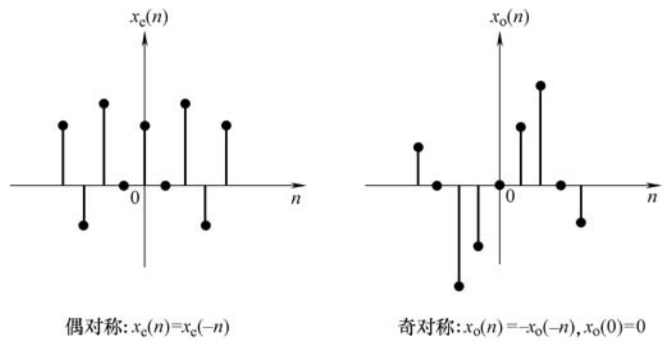


图 3.1.8　序列的对称性

在对称条件下，序列均具有对称的定义域 $-N\leqslant n\leqslant N$，$N$ 为任意整数。不过对于奇对称序列，还存在 $x_o(0)=0$，并且 $x_o(n)$ 在对称定义域 $(-\alpha,\ \alpha)$ 上的和为零，即

$$\sum_{k=-M}^{M} x_o(k)=0 \tag{3.1.31}$$

### 3.1.3　序列波形生成

**1. 时间向量**

计算机程序一般要求用一个向量描述时间轴。例如，考虑生成一个抽样频率为 1000Hz 的数据，则用 MATLAB 可以给出一个 1001 点且持续时间 1s 的时间向量如下：

```
t = (0: 0.001: 1)';
```

一旦定义了时间变量 $t$，就可以创建一个包含 50Hz 正弦序列和 120Hz 正弦序列的样本信号 $y$：

```
y = sin(2*pi*50*t)+2*sin(2*pi*120*t);
```

基于时间变量 $t$ 生成的新变量 $y$ 同样具有 1001 点且持续时间 1s。下面源程序对 $y$ 加入了正态分布白噪声，并且绘制出信号序列的前 50 个样本波形，如图 3.1.9a 所示。

```
randn('state', 0);
yn = y + 0.5*randn(size(t));
plot(t(1: 50), yn(1: 50))
```

**2. 常用序列波形**

用 MATLAB 可以生成多种形式的信号序列。下面源程序生成几个工程中常用的序列，其中包括单位样值序列、单位阶跃序列和单位斜坡序列：

```
t = (0: 0.001: 1)';
imp=[1; zeros(99, 1)];            % Impulse
unit_step = ones(100, 1);         % Step (with 0 initial cond.)
```

```
ramp_sig= t;                    % Ramp
quad_sig=t.^2;                  % Quadratic
sq_wave = square(4*pi*t);       % Square wave with period 0.5
```

注意，所有生成的序列都是列向量，且后三个序列的波形直接源自时基序列 t。

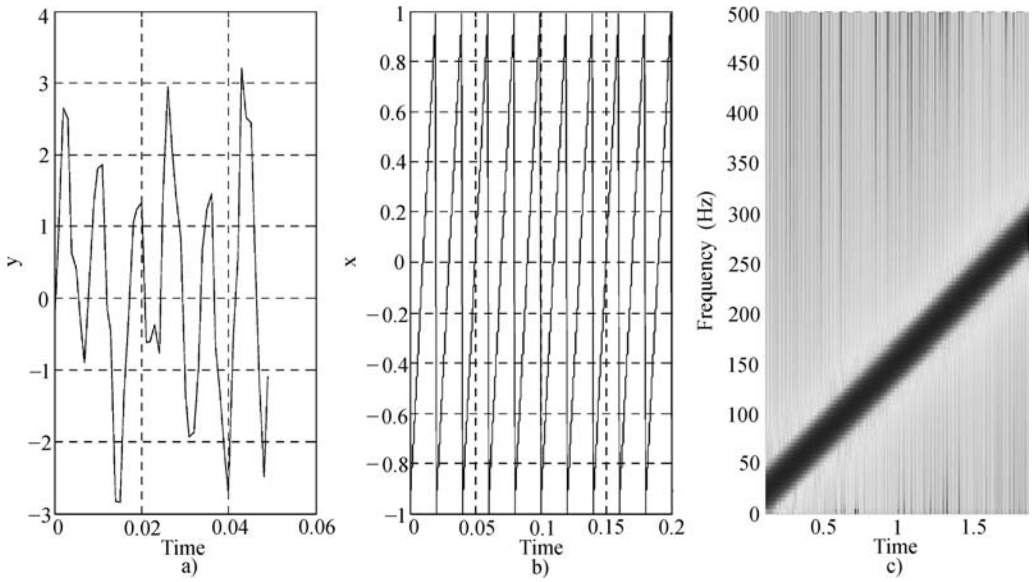


图 3.1.9　序列的波形

**3. 多通道序列波形**

处理多通道序列调用 MATLAB 的标准数组语句是很方便的。例如，由上述程序中最后三个语句生成的序列组成一个多通道序列的源程序是

```
z = [ramp_sig quad_sig sq_wave];
```

如果调用矢量积算子还可以生成一个多通道单位函数。例如，生成一个除第一个元素是 1 外，其余元素均为 0 的 6 元列向量的源程序是

```
a = [1 zeros(1, 5)]';
```

若需要将这个列向量 $a$ 复制成一个矩阵，用 MATLAB(:)算子和 ones 函数就可以省去乘法运算。例如语句

```
c = a(:, ones(1, 3));
```

将 6 元列向量 $a$ 复制成一个 $6\times3$ 的矩阵 $c$。

**4. 常用周期序列波形**

MATLAB 提供了生成多种周期序列波形的函数，如锯齿波 sawtooth 函数和方波 square 函数。下面源程序基于 10kHz 抽样率生成一个持续时间 1.5s，频率为 50Hz 的锯齿波，波形图如图 3.1.9b 所示(为清楚起见仅画出前 0.2s 的波形)。

```
fs = 10000;
t = 0:1/fs:1.5;
x = sawtooth(2*pi*50*t);
plot(t, x), axis([0  0.2  -1  1])
```